Corrigé

1. a) $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{x+1-4}{2(x+1)} = \dfrac{x-3}{2(x+1)}$

b)

x	-1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	
$2(x+1)$	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{5}{2} - 2\ln 4$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Attention : il faut lire la droite d'équation $y = -x$.
Il s'agit de résoudre l'équation :

$$f'(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{x-3}{2(x+1)} = -1 \text{ avec } x \in]-1\ ;+\infty[$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = -2(x+1) \text{ avec } x \in]-1\ ;+\infty[$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ avec } x \in]-1\ ;+\infty[.$$

Il existe donc une tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{3}$, parallèle à la droite d'équation $y = -x$.

$$T_{\frac{1}{3}} : y = f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$y = -\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{7}{6} - 2\ln\left(\frac{4}{3}\right) = -x + \frac{3}{2} - 2\ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

3. $f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x + 1\right) = -2\ln(x+1)$

Pour tout $x \in]-1 ; 0[$, on a $0 < x + 1 < 1$

Donc $\ln(x+1) < 0$.
Et pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, on a $\ln(x+1) > 0$.
Par conséquent, la courbe $\mathscr{C}_f$ est strictement en-dessous de la droite d sur l'intervalle $]-1\ ; 0[$ et strictement au-dessus sur l'intervalle $]0\ ; +\infty[$.